

# 基于三次样条函数算法的逆阿贝尔变换

江少恩, 刘忠礼, 唐道源, 郑志坚

(中国工程物理研究院核物理与化学研究所, 高温高密度等离子体重点实验室, 四川 绵阳 621900)

**摘要:** 等离子体有关参数的径向分布, 在等离子体研究中十分有意义的。只要等离子体具有轴对称和光性薄的性质, 那么利用 Abel 逆变换便可以从所测量得到的某种物理量, 沿测量方向的积分求出径向分布值。激光等离子体实验中的轴对称的 X 光体发射强度分布及通过多通道方法可测量电子密度和温度分布, 需要采用逆阿贝尔 (Abel) 变换。本文采用三次样条函数近似方法计算逆 Abel 变换, 并对两种有代表性的分布进行了计算, 数值模拟结果表明: 此方法反演的精度高, 计算也比较简便, 程序实现很容易。

**关键词:** 阿贝尔 (Abel) 变换; 三次样条函数; X 射线

**中图分类号:** TL65 **文献标识码:** A

## 1 引言

对等离子体辐射的 X 射线强度进行空间分辨的研究, 可以给出有关靶加热过程发生的重要数据。获得等离子体 X 射线图像最简单的探测器是 X 光针孔相机 (PHC), 针孔相机由三个部分组成: 针孔、滤膜和记录元件。针孔是在对 X 光不透明的屏上开一个小孔; 滤膜为对可见光不透明而对 X 光有一定吸收的材料薄膜; 记录元件通常为 X 光胶片, 也可用其它的二维探测器, 如微通道探测器和 X 光 CCD 等。针孔相机探测到的 X 光是沿观测方位的等离子体源辐射的 X 光的总和, 即线积分, 而获得有关等离子体源内任一点的 X 光分布则是更有意义的。对于一般分布的 X 光, 通过单个探测器即针孔相机的图像原则上不可能反演出 X 光的分布。只要等离子体具有圆形截面和光性薄的性质, 那么通过单个探测器的图像利用逆 Abel 变换便可以从所测量的物理量, 沿测量方向的积分值求出径向分布值<sup>[1-3]</sup>。

此外, 两种以上不同的滤膜在记录介质上记录不同波段的 X 光 (即多通道方法) 的空间分布, 可以间接确定等离子体的电子密度和温度分布。由于 X 光强度是 X 光波长、电子密度和温度的函数, 所以通过记录两种以上波段的 X 光由逆 Abel 变换得到对应的径向分布, 求两个不同波段的 X 光分布的方程, 可确定电子密度和温度<sup>[4]</sup>。

本文不对 X 光实验情况作分析, 主要对应用

于等离子体物理参量测量的 Abel 变换进行数值模拟与分析。采用三次样条函数对逆 Abel 变换进行数值计算, 对三次样条函数应用于逆 Abel 变换作了仔细的推导, 给出实例进行计算, 并对计算结果作简要的分析。

## 2 Abel 变换及其逆变换

沿轴对称物体分布的线积分而得到的投影称为 Abel 变换, 反之, 由投影求解轴对称物体分布的过程称之为逆 Abel 变换。设  $\epsilon(r)$  为轴对称的源分布函数,  $I(x)$  为沿  $y$  方向测量得到的投影为 (见图 1)

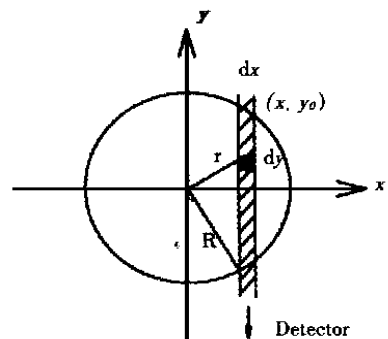


Fig. 1 Geometry of coordinate

$$I(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \epsilon(r) dy \quad (1)$$

在这个积分中,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y_0^2 = R^2 - x^2$ 。当半径大于  $R$  时  $\epsilon(r)$  可忽略不计, 并利用对称性的性质, 可得

$$I(x) = 2 \int_x^R \frac{\epsilon(r) r dr}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2)$$

(2) 式便是著名的 Abel 积分方程。也称为 Abel 变换,  $I(x)$  可由诊断设备测量而得, 它是  $\epsilon(r)$  的求解为 Abel 逆变换:

$$\epsilon(r) = - \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{(dI/dx) dx}{(x^2 - r^2)^{1/2}} \quad (3)$$

实际上, 由于(5)式积分中的积分下限存在奇点, 并且投影的微分  $dI/dx$  将导致数据的噪声进一步恶化, 因此, 由测量的投影  $I(x)$  直接应用(5)式求逆 Abel 变换是很困难的。为了求解方程(3), 人们避开奇点和投影的微分问题, 采用了一些数值方法。如 Barr 采用分段多项式近似求逆 Abel 变换, 而 Bockasten 通过拟合三阶多项式求逆变换, 但是这两种方法的精度都不高。我们采用三次样条函数近似算法数值求解逆 Abel 变换, 具体过程就是, 在每一探测值之间即每一子区间  $x_j, x_{j+1}$ , 先将  $I(x)$  由三次样条函数多项式代替, 然后对每一子区间的多项式由(3)式求逆 Abel 变换, 由于多项式的逆 Abel 变换是很简单的, 可以解析求出, 于是由多个子区间三次样条函数的多项式的逆 Abel 变换迭加即获得逆 Abel 变换。

为了处理不同形状的曲线, 将所获得的数据  $I(x)$  分成多个子区间, 这些子区间覆盖整个  $X$  轴的正向区间, 在每个子区间,  $I(x)$  用三次多项式表示, 多个子区间的多项式的组合即可获得整个区间的  $I(x)$  的表示。对于每个子区间,  $I(x)$  的三次多项式可写成

$$I_j(x) = A_j + B_j x + C_j x^2 + D_j x^3 \quad (4)$$

相应的导数为

$$d[I_j(x)]/dx = B_j + 2C_j x + 3D_j x^2 \quad (5)$$

将(5)式代入各子区间的逆 Abel 变换式(3)式, 于是可得

$$\epsilon(r) = - \frac{1}{\pi} \int_j [B_j \ln \frac{x_{j+1} + s_{j+1}}{x_j + s_j} + 2C_j (s_{j+1} - s_j) + \frac{3}{2} D_j (x_{j+1} s_{j+1} - x_j s_j + r^2 \ln \frac{x_{j+1} + s_{j+1}}{x_j + s_j})] \quad (6)$$

其中  $j = 0, 1, 2, \dots, N, s_j = \sqrt{x_j^2 - r^2}$ 。(6) 中的  $j$  取值要求  $x_j > r$ 。

在子区间  $x_j, x_{j+1}$  上的(4)式的三次多项式由三次样条函数近似方法求出, 具体形式为:

$$I(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + (I_j - M_j h_j^2/6) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} +$$

$$(I_{j+1} - M_{j+1} h_j^2/6) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (7)$$

其中  $h_j = x_{j+1} - x_j, M_j$  为结点  $x_j$  处  $I(x)$  的二阶导数。由于  $I(x)$  在各子区间  $x_j, x_{j+1}$  一阶导数是连续的, 即在各结点的左右两子区间上的  $I(x)$  虽然不同, 但在连接点处一阶导数存在, 即  $I(x)$  应满足如下条件

$$I(x_j - 0) = I(x_j + 0) \quad (8)$$

由于  $I(x)$  有  $N - 1$  个结点, 于是由(8)式可得到  $N - 1$  个线性代数方程, 但未知量  $M_j$  有  $N + 1$  个, 故还需要另外附加两个条件才能唯一确定  $N + 1$  个  $M$  值。这两个条件可根据实际的物理意义所给出的边界条件得到。由于所考虑的等离子体是轴对称的, 那么在  $x = 0$  处,  $I(x)$  的一阶导数为零。在等离子体的外边界  $r = R$  处,  $X$  光强度为零, 那么  $I(x)$  的一阶导数也应为零。于是又得到两个方程

$$I(0) = I(R) = 0 \quad (9)$$

这样, 由  $N + 1$  个线性方程组可求出  $N + 1$  个未知量  $M$ 。又由(4)式和(7)式相等, 可得到关系式

$$A_j = [M_j x_{j+1}^3 - M_{j+1} x_j^3]/(6h_j) + (I_j - M_j h_j^2/6) x_{j+1}/h_j - (I_{j+1} - M_{j+1} h_j^2/6) x_j/h_j \quad (10)$$

$$B_j = [M_{j+1} x_j^2 - M_j x_{j+1}^2]/(2h_j) - (I_j - M_j h_j^2/6)/h_j + (I_{j+1} - M_{j+1} h_j^2/6)/h_j \quad (11)$$

$$C_j = [M_j x_{j+1} - M_{j+1} x_j]/(2h_j) \quad (12)$$

$$D_j = [M_{j+1} - M_j]/(6h_j) \quad (13)$$

以上就是用三次样条函数算法计算逆 Abel 变换全部推导过程。计算程序实现过程是, 先由各结点的值  $I_j$  计算出  $N + 1$  个结点处的二阶导数  $M$ , 然后由(10) - (13) 计算出三阶多项式的系数  $A, B, C$  和  $D$ , 代入(6)式, 即可求出径向分布  $\epsilon(r)$  值。

我们采用 FORTRAN 语言对以上的算法编制了程序 SPLINE3。在该程序中, 调用了文献[5]的三次样条函数 SPLINE 子程序和高斯—勒让德数值积分法的 GASLEG 子程序。

### 3 数值计算结果及分析

我们选择两种有代表性的分布用变换法进行计算, 一种为高斯型分布

$$\epsilon(r) = \exp(-9r^2) \quad (14)$$

另一种为双峰型分布

$$\epsilon(r) = \begin{cases} 0.75 + 12r^2 - 32r^3 & 0 \leq r \leq 0.25 \\ 16/27(1 + 6r - 15r^2 + 8r^3) & 0.25 \leq r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (15)$$

不失一般性,取等离子体的外边界为  $R = 1$ , 因为可以用实际的外边界对测量空间范围进行归一化。取样点数为  $N + 1 = 21$ 。计算时,由(1)或(2)式对两种分布[(14)和(15)式]用数值积分方法或解析积分方法而产生投影  $I(x)$ , 然后由(6)式计算出分布轴对称分布  $\epsilon(r)$ , 计算结果分别见图2和图3。图中曲线表示由(14)和(15)式直接计算的  $\epsilon(r)$ , 小圆表示由投影  $I(x)$  通过(6)式计算的结果  $\epsilon_1(r)$ 。由图可以看出,小圆全部落在曲线上,可见计算结果与原分布相当一致。

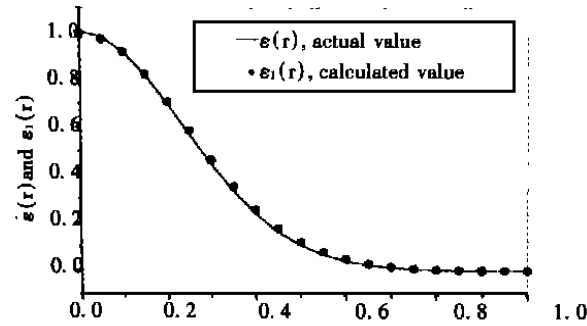


Fig.2 Unfolding for gaussian distribution from Eq. (6)

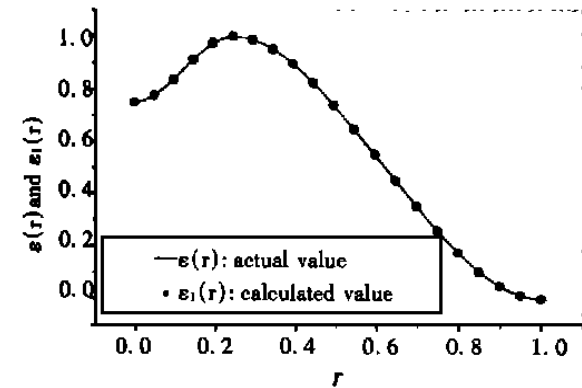


Fig.3 Unfolding for double peak distribution from Eq. (6)

计算精度由标准差  $\sigma$  来衡量,其表达式为

$$\sigma = \left\{ \sum_{j=0}^N [\epsilon_1(r_j) - \epsilon(r_j)]^2 / (N + 1) \right\}^{1/2} \\ = \left\{ \sum_{j=0}^N [\Delta\epsilon(r_j)]^2 / (N + 1) \right\}^{1/2} \quad (16)$$

上式中  $\epsilon_1(r)$  表示计算的结果,  $N$  为取样点的个数。 $\sigma$  越小,计算误差就越小,当  $\sigma = 0$  时,  $\epsilon_1(r) = \epsilon(r)$ , 即可以精确反演得到原分布。但实际上是

不可能的,总存在一定的计算误差,大小不同而已。对高斯分布(14)式,计算得到  $\sigma = 1.0 \times 10^{-4}$ , 对双峰分布(15)式,计算得到  $\sigma = 3.9 \times 10^{-3}$ 。

为了对比,我们采用 Barr 的方法对逆 Abel 变换进行计算。Barr 的方法大致如下<sup>[2]</sup>。

将  $X$  轴以及等离子体截面半径  $R$  分为若干等分  $\Delta$ ,  $x_n = n\Delta$ ,  $x_k = k\Delta$ ,  $R = N\Delta$ ,  $n$  和  $k$  为 0 到  $N$  之间的整数。在每一子区间内,  $I(x)$  可以近似表示为

$$I_n(x) = a_n + b_n x^2 \quad (17)$$

方程(3)式便有如下形式

$$\epsilon_k = \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{n=k-2}^N \beta_n I_n \quad k > 2, \\ \epsilon_k = \frac{1}{\pi\Delta} \sum_{n=k}^N \beta_n I_n \quad k = 2 \quad (18)$$

文献[2]给出了  $N$  为 20 的一组系数  $\beta_{kn}$ 。

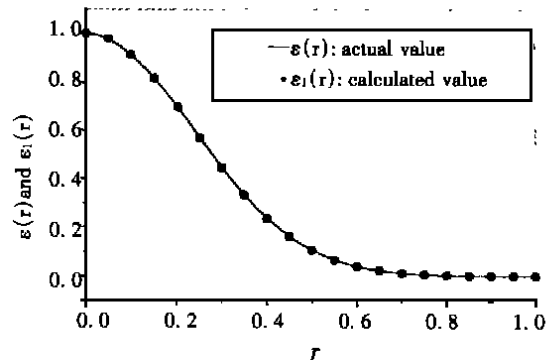


Fig.4 Unfolding for gaussian distribution from Eq. (18)

采用 Barr 的方法对(14)和(15)式的计算结果分别见图4和图5。对(14)式的计算结果比(15)式的结果更好。对双峰分布(15)式,计算得到  $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$ 。对高斯分布(14)式,计算得到  $\sigma = 1.39 \times 10^{-2}$ 。比较图(2)和图(4)可看出,用三次样条函数算法的结果比 Barr 方法的计算精度高。同样,比较图(3)和图(5),也是用三次样条函数算法的结果比 Barr 方法的计算精度更高。用三次样条函数算法的标准差都小于由 Barr 的方法对相同的分布的标准差,可见三次样条函数算法的精度确实要高。而且样条函数法的取样点可以不是等间距的,而 Barr 的方法则要求是等间距的;文献[2]仅给出 20 个取样点的计算系数,对更多的取样点则无能为力,而样条函数法原则上对取样点的个数多少并无限制。另外,样条函数法算法的程序很容易实现。

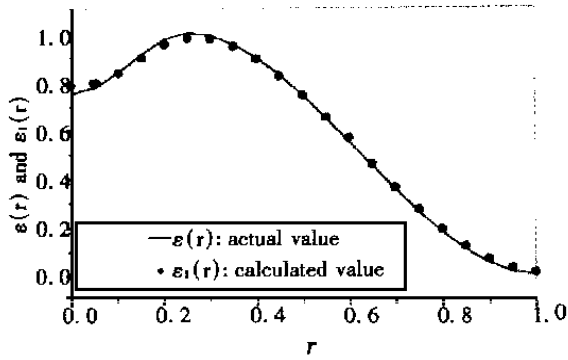


Fig. 5 Unfolding for double peak distribution from Eq. (18)

## 4 结论和讨论

本文采用三次样条函数方法对轴对称的投影进行反演即逆 Abel 变换。此方法的特点是精度高, 计算也比较简便, 程序实现很容易。而且取样点个数的多少没有限制, 对取样点的间距可以不同, 不需要等间距。因此 Abel 变换对于轴对称分布的重建即逆 Abel 变换来说是一种实用有效的数值计算方法。

## 参考文献:

- [1] Bockasten K. Transformation of observed radiances into radial distribution of the emission of plasma[J]. J. Opt. Soc. Amer., 1961, 51(9): 943- 947.
- [2] Barr W. Method for computing the radial distribution of emitters in cylindrical source[J]. J. Opt. Soc. Amer., 1962, 52(8): 885- 888.
- [3] 朱士尧. 等离子体诊断中的 Abel 逆变换, 核聚变与等离子体物理[J]. 1987, 7(2): 102- 107.
- [4] Donaldson T, Spalding I. Density cavities and X-ray filamentation in CO<sub>2</sub>-laser-produced plasmas[J]. Phys. Rev. Lett., 1976, 36(9): 467- 470.
- [5] 何光渝. FORTRAN 77 算法手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993 年.

## Inverted Abel transform based on cubic spline functions

JIANG Shao-en, LIU Zhong-li, TANG Dao-yuan, ZHENG Zhi-jian

(High Temperature and High Density Plasma Physics Laboratory, Institute of Nuclear Physics and Chemistry, Chinese Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

**Abstract:** The radial distributions of plasma parameters are very important in plasma physics. If the plasma distribution is axial symmetrical and optically thin, the radial distribution of some physical parameters are obtained by using Abel inversion from measured integral value along radial direction. The inverted Abel transform is necessarily used to compute the X-ray emission radial distribution and measure the electronic temperature and density through multichannel method in laser-produced plasma experiments. Using the cubic spline function method, the inverted Abel transform is numerically calculated from two typical distribution that are gaussian and off-axial distribution. The simulated results show that this algorithm is high accurate, convenient to compute and easy to program.

**Key words:** Abel transform; cubic spline function; X-ray

作者简介: 江少恩(1964-), 男, 湖北武汉市人。理学博士, 副研, 现从事惯性约束聚变的研究工作。